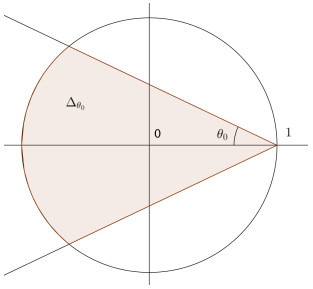
Références :
Analyse, Xavier Gourdon

Théo. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0\frac{\pi}{2}]$ et on pose*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \ et \ \exists \rho > 0 \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}/$$

Alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$



Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour majorer $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum n = 0^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)
\end{aligned}$$

En faisant tendre $N \to \infty$, on obtient

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

La série définie ci-dessus converge bien pour $|z| < 1$. En effet, si on revient à la définition de rayon de convergence, on a

$$R = \sup\{r > 0, (a_n |z|^n) \text{ est bornée}\}.$$

Or, comme (R_n) tend vers 0, on a, en particulier, que c'est une suite bornée. Ainsi, le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1 d'où le résultat.

Soit $\varepsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n > N$. On a donc,

pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \\ &\leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \end{aligned}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$ de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $|\phi| \leq \theta_0$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\phi) + \rho^2$ et, si $\rho \leq \cos(\theta_0)$ (c'est légitime car on veut regarder la limite quand $z \to 1$ donc on peut prendre ρ aussi petit que l'on veut), on a la majoration :

$$\begin{aligned} \frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\ &= \frac{\rho}{2\rho\cos(\phi) - \rho^2}(1+|z|) \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\phi) - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \\ &\leq \frac{2}{\cos(\theta_0)} \end{aligned}$$

Si on choisit maintenant $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$, on voit donc que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $\rho \leq \min(\alpha, \cos(\theta_0))$, on a donc

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

d'où le résultat. $\square$

Leçons possibles : 241 - 243